Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.06.2013.

Drugi parcijalni iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(50%) a) Neka je $k(O, r)$ opisani krug oko $\triangle ABC$. Pokazati da su projekcije proizvoljne tačke kruga na stranice trougla kolinearne.

(50%) b) Neka je $k(O, r)$ krug opisan oko trougla $\triangle ABC$, i neka je P proizvoljna tačka kruga. Neka su L, M i N projekcije od P redom na $p(B, C)$, $p(C, A)$, $p(A, B)$. Dalje neka je AK visina a G ortocentar $\triangle ABC$. Neka $p(A, K)$ siječe krug k u tački H i neka je $\{F\} = PH \cap BC$, $\{J\} = PH \cap LN$. Ako su L, M i N kolinearne pokazati da vrijedi $JL \cong JP \cong JF$.

Zadatak br. 2

(20%) Dat je $\triangle ABC$. Kroz vrh A konstruisati pravu koja će dati trougao podijeliti na dva trougla sa jednakim površinama.

(20%) Konstruisati paralelogram čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

(60%) Konstruisati paralelogram čija će površina i obim biti jednaki površini i obimu datog trougla.

Zadatak br. 3

(20%) a) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$, gdje su a i b date duži $(a < 1 < b)$.

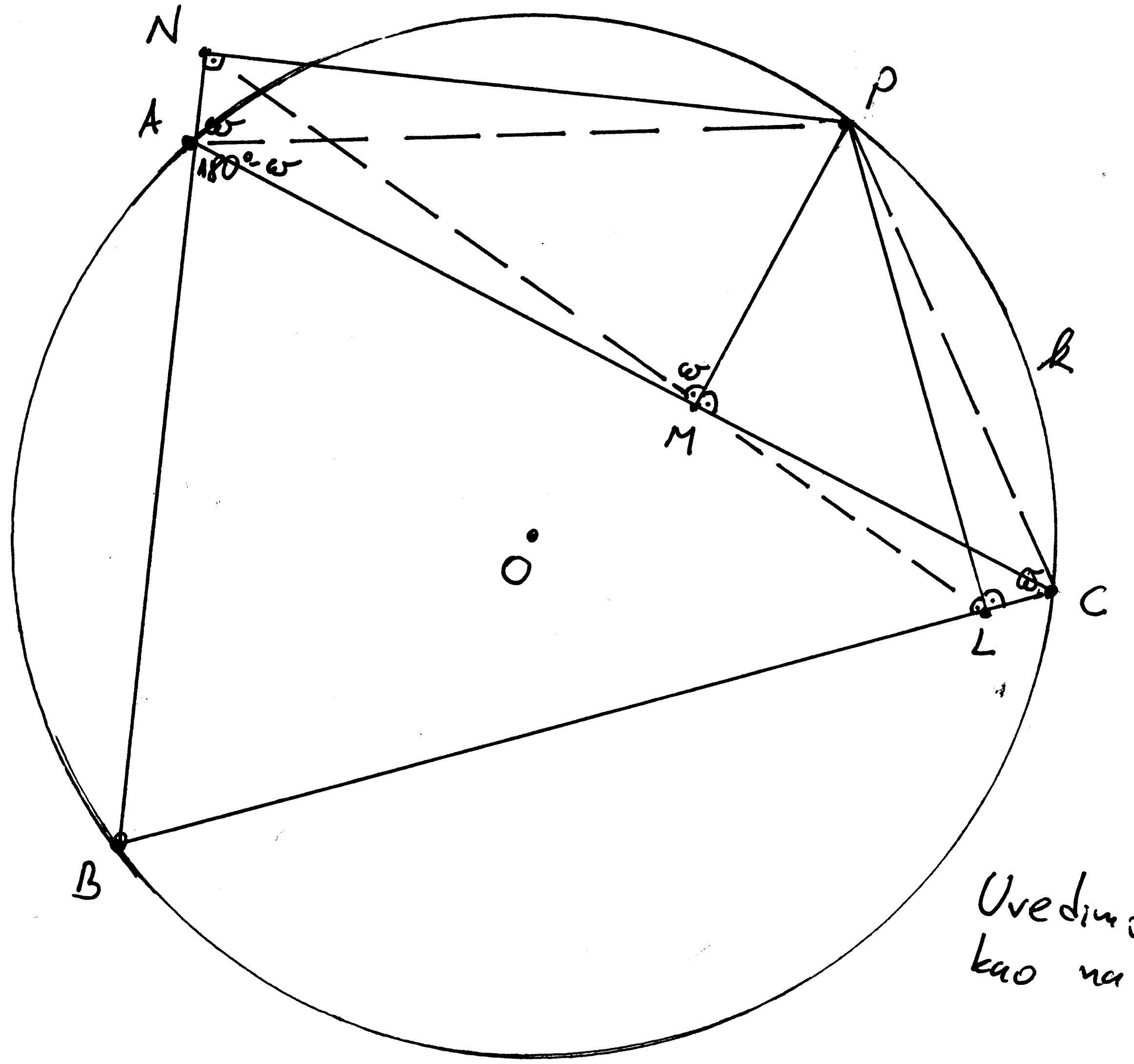
(20%) b) Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A, B) \| t$. Konstruisati krug kroz tačke A i B koja dodiruje datu pravu t (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi ali bodovat će se samo Analiza).

(60%) c) Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku i dodiruje dva data kruga (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi ali bodovat će se samo Analiza).

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je $k(O, r)$ opisani krug oko $\triangle ABC$. Pokazati da su projekcije proizvoljne tačke kruga na stranice trougla kolinearne.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\square AMPN$ je tetivni $(\measuredangle AMP + \measuredangle ANP = 180°) \Rightarrow \measuredangle NMP \cong \measuredangle PAN = \omega$

$\measuredangle NAP + \measuredangle PAB = 180° \Rightarrow \measuredangle PAB = 180° - \omega$

$\square PABC$ je tetivni (k prolazi kroz tačke A, B, C, P) $\Rightarrow \measuredangle BCP = \omega$

$\square MLCP$ je tetivni $(\measuredangle PLC \cong \measuredangle PMC = 90°) \Rightarrow \measuredangle LMP = 180° - \omega$

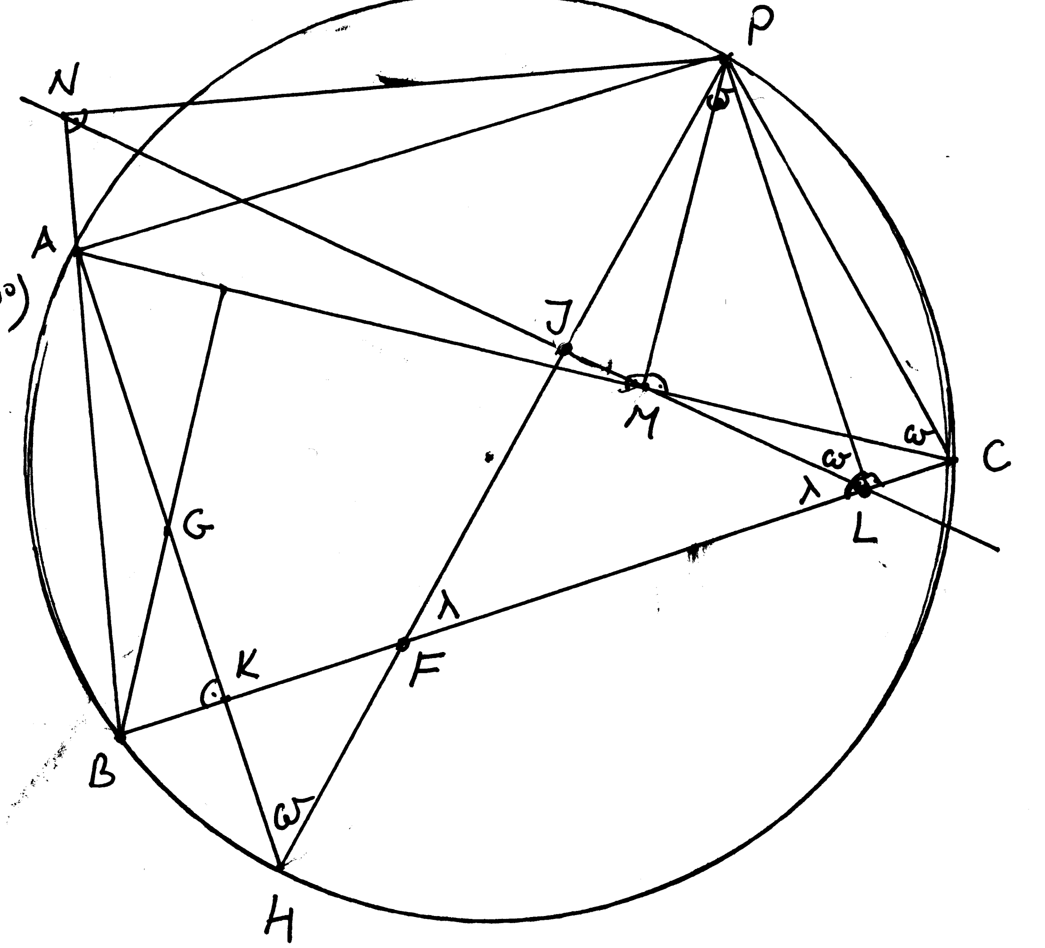
Prema tome imamo $\measuredangle LMP + \measuredangle PMN = 180° - \omega + \omega = 180°$

$\Rightarrow$ L, M i N su kolinearne tačke

q.e.d.

(#) Neka je $k(O,r)$ krug opisan oko trougla $\triangle ABC$, i neka je P proizvoljna tačka kruga. Neka su L, M i N projekcije od P redom na $p(B,C)$, $p(C,A)$, $p(A,B)$. Dalje neka je AK visina a G ortocentar $\triangle ABC$. Neka $p(A,K)$ sijeće krug k u tački H i neka je $\{F\} = PH \cap BC$, $\{J\} = PH \cap LN$. Ako su L, M i N kolinearne pokazati da vrijedi $JL \cong JP \cong JF$.

Rj.



$\square PMLC$ je tetivni ($\measuredangle PLC \cong \measuredangle PMC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \measuredangle PLM \cong \measuredangle PCM = \omega$

$\Rightarrow \measuredangle PCA \cong \measuredangle PLN = \omega$

$\square BCPA$ tetivni (plena postavci)

$\Rightarrow \measuredangle PCA \cong \measuredangle PHA = \omega$

$AK \perp BC$ i $PL \perp BC$

$\Rightarrow p(A,K) \parallel p(P,L)$ i ako posmatramo $p(P,H)$ kao transferzalu imamo $\measuredangle AHP \cong \measuredangle LPH = \omega$

Time smo dobili da je u $\triangle PJL$, $\measuredangle LPJ \cong \measuredangle JLP = \omega$

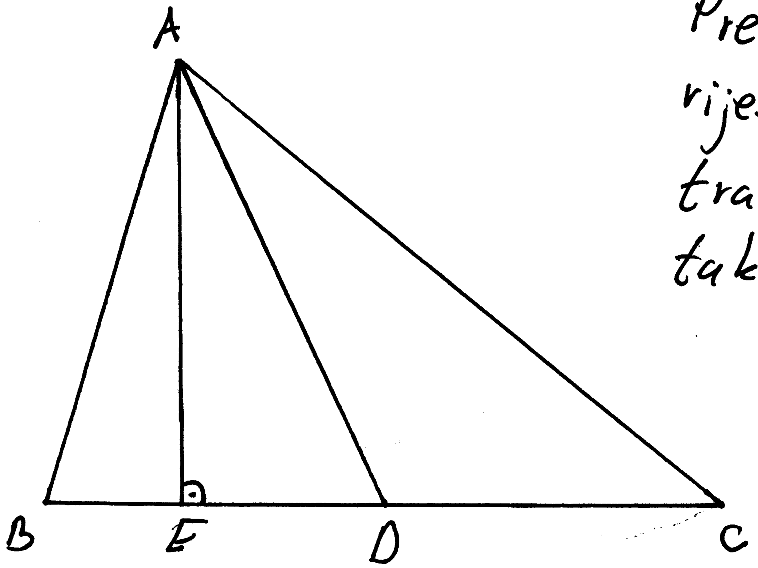
$\Rightarrow JP \cong JL \quad \dots(1)$

Iz (1) i (2) slijedi tvrdnja zadatka.

Primjetimo da je $\triangle PFL$ pravougli i da je $\measuredangle FPL + \measuredangle PFL = \omega + \lambda = 90^\circ$, pa kako je $\measuredangle PLJ = \omega \Rightarrow \measuredangle FLJ = \lambda \Rightarrow JF \cong JL \quad \dots(2)$

(#) Dat je ΔABC. Kroz vrh A konstruisati pravu koja će dati trougao podijeliti na dva trougla sa jednakim površinama.

Rj. <u>Analiza</u>



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p(A,D)$ tražena prava $(D \in BC)$ takva da je $P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ADC}$.

Posmatrajmo trouglove ΔABD i ΔACD.

Ako spustimo visinu iz A u oba ova trougla (npr AE je visina) imamo:

$$P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ADC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\frac{|AE| \cdot |BD|}{2} = \frac{|AE| \cdot |DC|}{2}$$

$$|BD| = |DC|$$

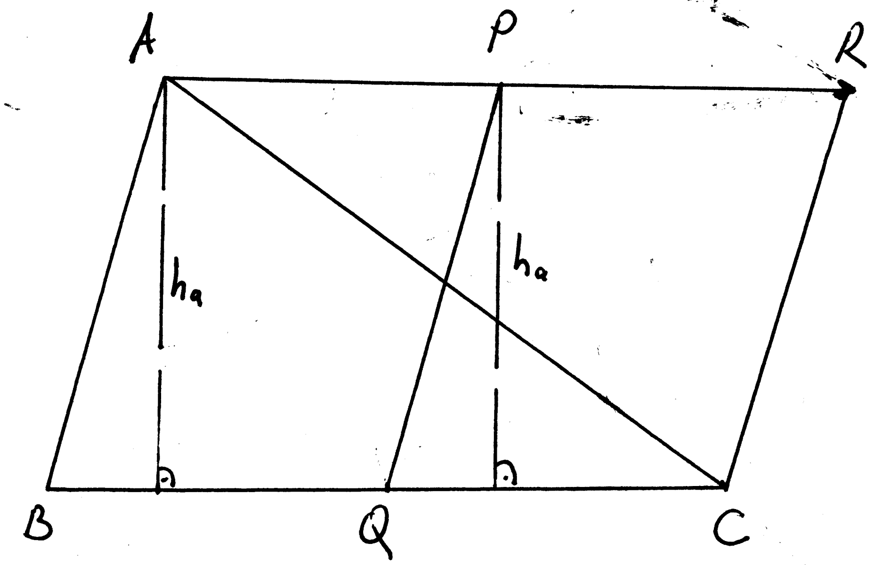
Prema tome D je sredina stranice BC, pa traženu pravu nije teško konstruisati.

(#) Konstruisati paralelogram čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\triangle ABC$ dati trougao i neka je $\square QCRP$ traženi paralelogram (gdje je $Q \in BC$ i gdje je $A \in p(P,R)$).



$$P_{\triangle ABC} = \frac{h_a \cdot a}{2}$$

$$P_{\square QCPR} = h_a \cdot |QC|$$

Kako je površina $\triangle ABC$ jednaka površini četverougla $\square PQCR$ to je $\frac{h_a \cdot |BC|}{2} = h_a \cdot |QC|$

$|BC| = 2 \cdot |QC| \Rightarrow$ Q je na sredini od BC

Kakve osobine treba da ima tačka P?

Primjetimo da za proizvoljnu tačku P t.d. $p(P,R) \parallel p(Q,C)$ i da je P na udaljenosti h_a od $p(Q,C)$ imamo da je

$$P_{\triangle ABC} = P_{\square QCRP}$$

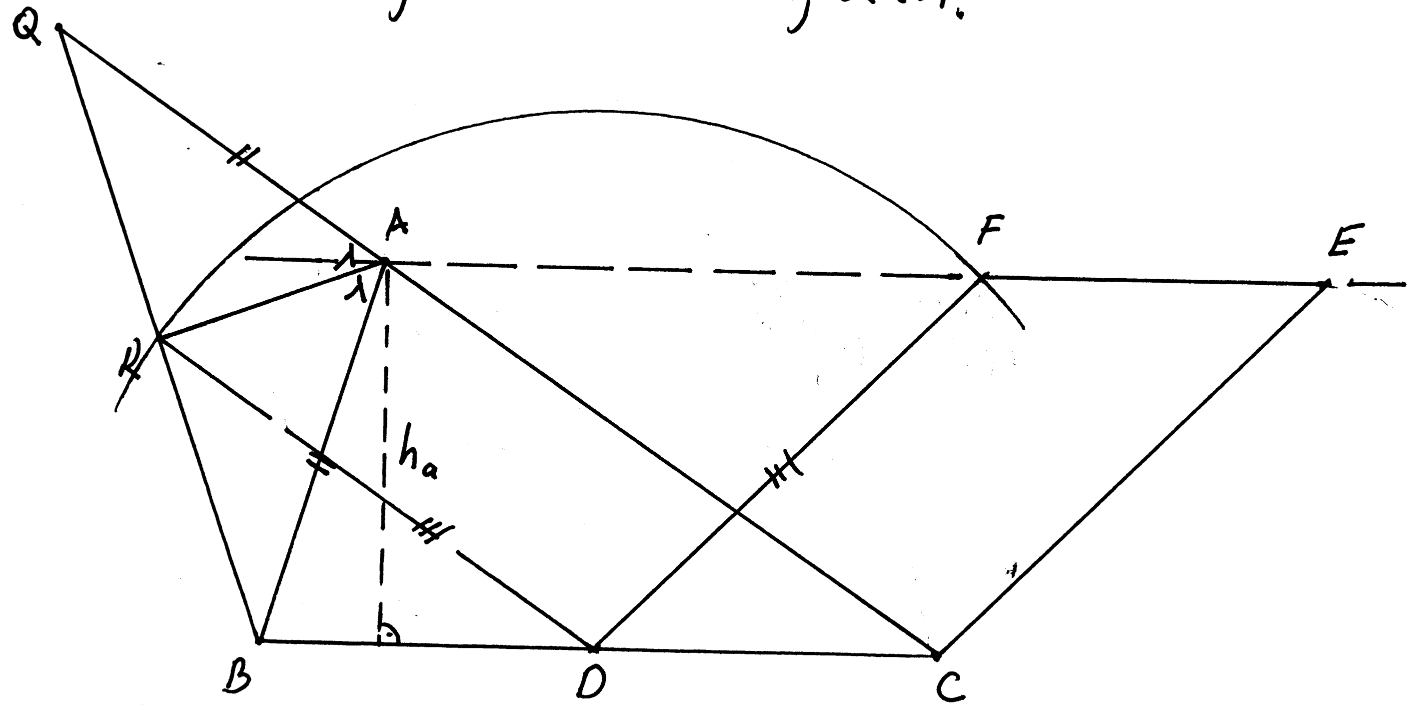
Dati paralelogram sad nije teško konstruisati.

Konstruisati paralelogram čija će površina i obim biti jednaki površini i obimu datog trougla.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\square DCEF$ traženi paralelogram, čiji su obim i površina jednaki površini datog $\triangle ABC$, i gdje su $D \in BC$, $F, E \in p(A,E)$ i $p(A,E) \parallel p(B,C)$. Ako sa h_a označimo visinu iz vrha A $\triangle ABC$ tada imamo

$$P_{\triangle ABC} = P_{\square DCEF} \Rightarrow \frac{|BC| \cdot h_a}{2} = |DC| \cdot h_a \Rightarrow |BC| = 2|DC| \Rightarrow D \text{ sredina stranice } BC$$

Tada $BC = BD + CD = DC + EF$. Kako su obimi jednaki tačke F i E moraju imati osobinu da je $\overbrace{DF + CE}^{=2DF} = AB + AC$.

Produžimo duž CA do tačke Q t.d. $AQ \cong AB$ i neka je AR simetrala ugla $\measuredangle BAQ$. Prema podudarnosti SUS imamo da je $\triangle QAR \cong \triangle BAR$

$$\Downarrow$$

$BR \cong RQ \Rightarrow R$ je sredina BQ

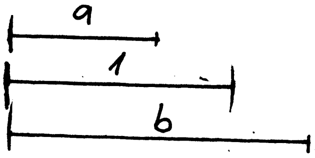
tj. DR je srednja linija $\triangle BCQ$

$DR = \frac{1}{2} QC = \frac{1}{2}(AB + BC)$

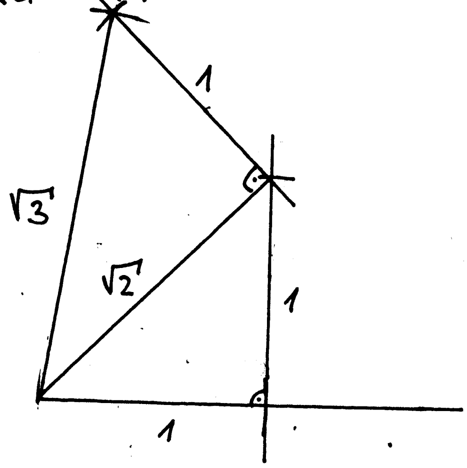
Paralelogram $\square DCEF$ nije teško konstr.

(#) Nacrtati duž $x=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$ gdje su a i b date duži $(a<1<b)$.

Rj.



Nacrtajmo duž $\sqrt{3}$.

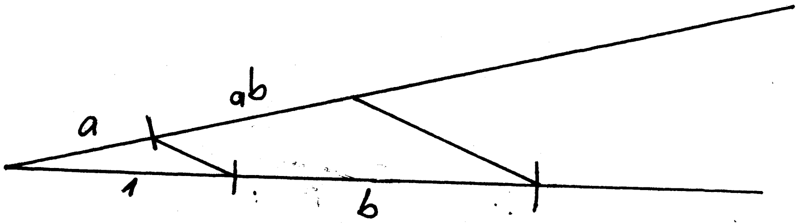


Nacrtajmo duž ab.

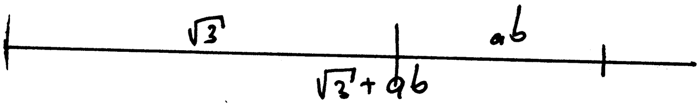
$y=a\cdot b$

$\dfrac{y}{a}=\dfrac{b}{1}$

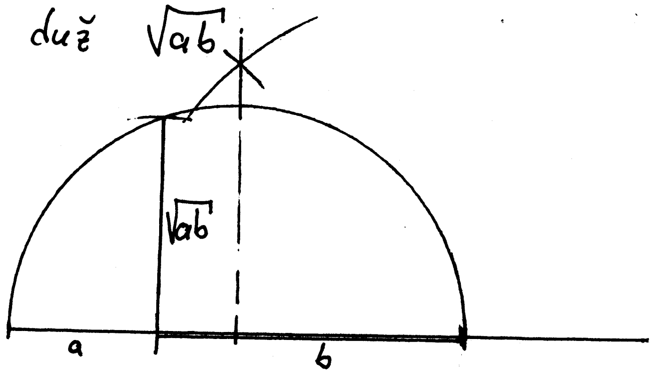
$\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{y}$



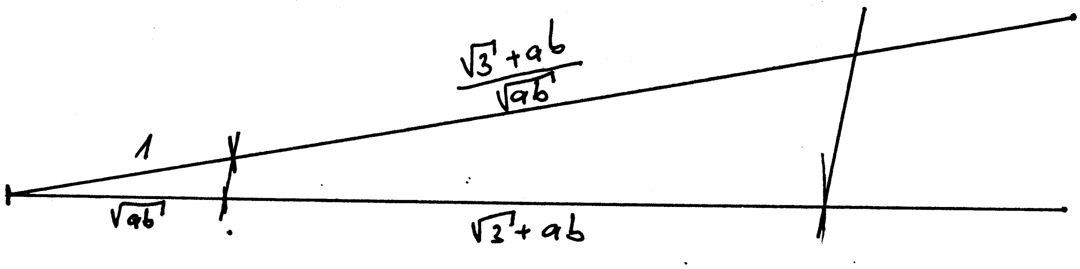
Nacrtajmo duž $\sqrt{3}+ab$



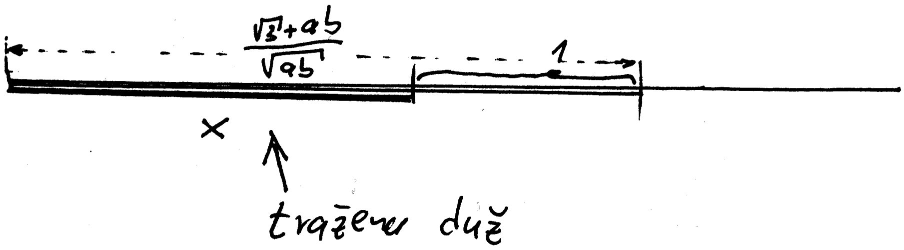
Nacrtajmo duž $\sqrt{ab}$



Nacrtajmo duž $\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}$. $z=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}+ab}=\dfrac{1}{z}$



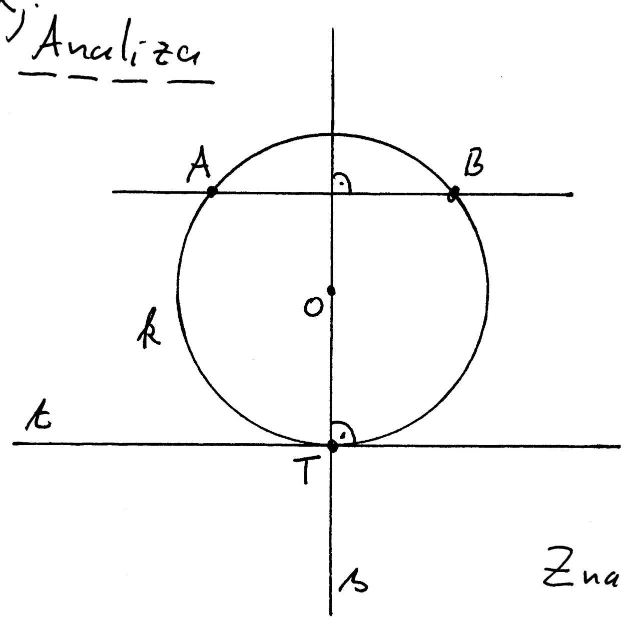
Na kraju nacrtajmo duž $x=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$



#) Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B) \parallel t$. Konstruisati kružnicu kroz tačke A, B koja dodiruje datu pravu t.

Rj:

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t u tački T i koja prolazi kroz tačke A i B.

Neka je s simetrala duži AB. Tačka $O \in s$ a kako je $p(AB) \parallel t$ to $s \perp t$.

Znamo da je $OT \perp t$ a kako je i $s \perp t$ to je $s \cap t = \{T\}$. Tačka O se nalazi na presjeku simetrala duži AB, AT i BT.

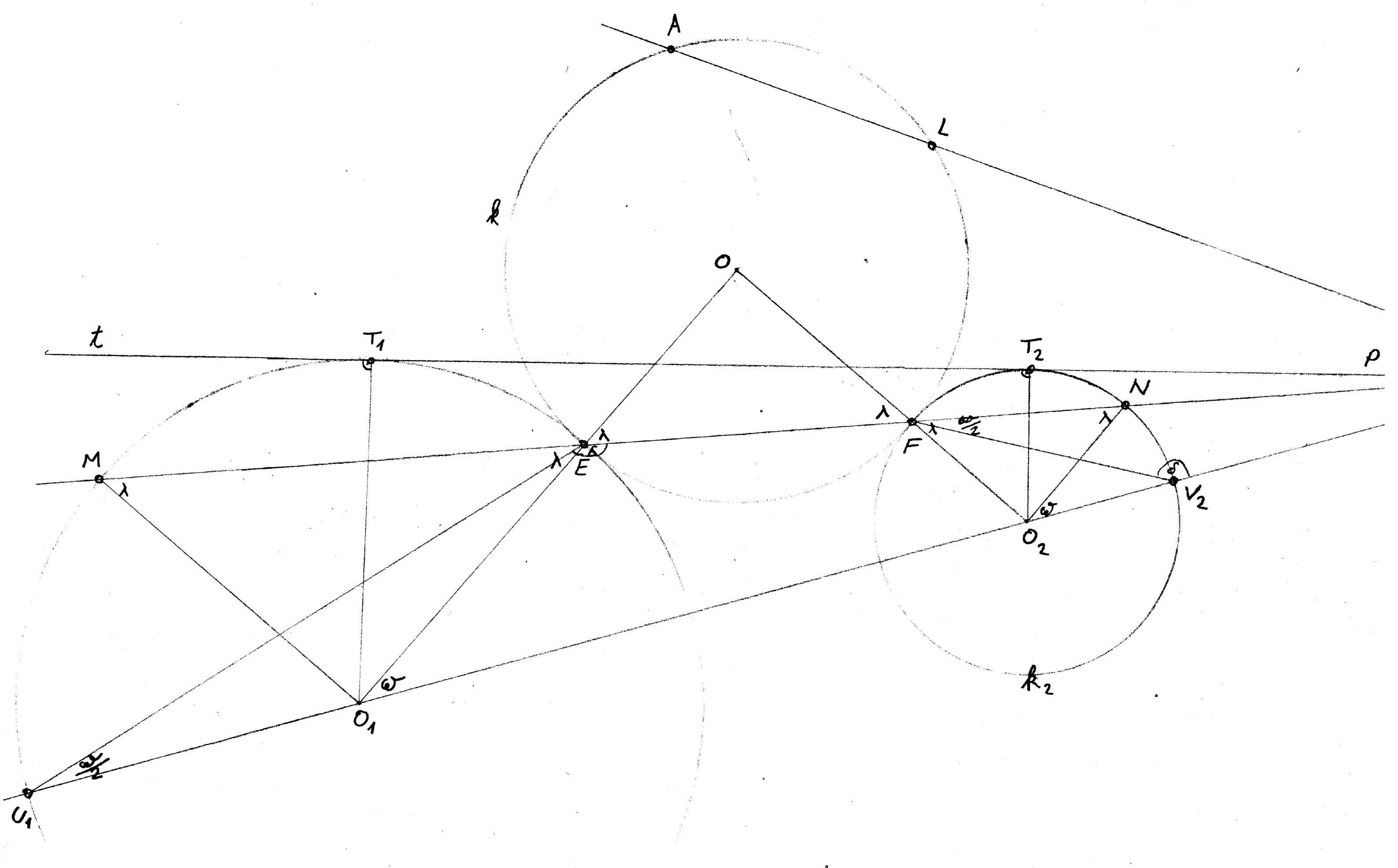
Prema tome kako su date tačke A i B, prava t to nije teško konstruisati simetralu s duži AB, dobiti tačku T a poslije toga i $k(O,r)$.

Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.
Neka tražena kružnica $k(O,r)$ dodiruje kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ redom u tačkama E i F, i prolazi kroz tačku A. Kako je E dodirna tačka kružnica k_1 i k_2 to su tačke O_1, E i O kolinearne. Primjetimo da su i tačke O, F i O_2 kolinearne. Označimo sa $\{P\} = p(O_1,O_2) \cap p(E,F)$.
Dalje neka je $p(E,F) \cap k_1 = \{M,E\}$ i $p(E,F) \cap k_2 = \{F,N\}$.
Primjetimo da su trouglovi $\triangle MO_1E$, $\triangle EFO$ i $\triangle FO_2N$ jkk a kako imaju podudarne unakrsne uglove to je i $\measuredangle EMO_1 = \measuredangle O_1EM = \measuredangle OEF = \measuredangle EFO = \measuredangle NFO = \measuredangle O_2NF = \lambda$.
Kako su tačke N, F, E i M na istoj pravoj

$$\Rightarrow p(O_1,M) \parallel p(O_2,F) \quad i \quad p(O_1,E) \parallel p(O_2,N)$$



Označimo sa $\{U_1, U_2\} = p(O_1, O_2) \cap k_1$ i $\{V_1, V_2\} = p(O_1, O_2) \cap k_2$.

Kako je ω centralni ugao $\Rightarrow \measuredangle EU_1P = \measuredangle PF_2 = \frac{\omega}{2}$.

Imamo
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle EPU_1 = \measuredangle V_2PF \\ \measuredangle EU_1P = \measuredangle PFV_2 = \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle PEV_1 = \measuredangle FV_2P \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta EU_1P \sim \Delta V_2PF$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{PU_1}{PF} = \frac{PE}{PV_2} \Rightarrow PE \cdot PF = PU_1 \cdot PV_2 \quad \ldots (*)$$

Primjetimo da je i $PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \ldots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow PA \cdot PL = PU_1 \cdot PV_2 \Rightarrow PL = \frac{PU_1 \cdot PV_2}{PA}$

Da bi mogli konstruisati tačku L potrebna nam je tačka P.

$$\left.\begin{array}{l} p(O_1, M) \parallel p(O_2, F) \xRightarrow{T_0T_0} \frac{PM}{PF} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{MO_1}{FO_2} = \frac{r_1}{r_2} \\ p(O_1, E) \parallel p(O_2, N) \xRightarrow{T_0T_0} \frac{PE}{PN} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P$ je centar homotetije koja kružnica k_2 preslikava u k_1 sa koeficijentom sličnosti $\frac{r_1}{r_2}$.

Ako pretpostavimo da je $p(P, T_2)$ tangenta kružnice k_2 (gdje je $T_2 \in k_2$), kako je P centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 to i tačku $T_2 \in k_2$ preslikava u tačku $T_1 \in k_1 \Rightarrow p(P, T_1)$ je tangenta kružnice k_1. Prema tome tačku P možemo konstruisati $(p(O_1, O_2) \cap p(T_1, T_2) = \{P\})$. Poslije tačke P možemo konstruisati tačku L pa se zadatak svodi na Apolonijev problem.